Analyse Hilbertienne

ECTS
6 crédits

Composante
Faculté des sciences

En bref

- Langue(s) d'enseignement: Français
- Ouvert aux étudiants en échange: Oui

Présentation

Description

Espaces de Banach, complétude. Espaces de Hilbert : théorème de projection sur un convexe fermé ; dualité, théorème de représentation de Riesz ; bases hilbertiennes.

Produit de convolution dans L1 et L2. Approximation de l'identité, densité des fonctions C-infinies et régularisation.

Transformée de Fourier dans L1, L2 et dans l'espace S de Schwartz. Théorème d'inversion dans L1, théorème de Plancherel-Parseval et inversion dans L2, inversion dans S.

Applications à la construction de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier) et à la résolution d'équations de convolutions et d'EDP.

Objectifs

Savoir reconnaître parmi les espaces fonctionnels classiques les Banach et les Hilbert.

Savoir construire des familles orthonormales et déterminer l'orthogonal d'un sous-espace en dimension infinie.

Savoir calculer un produit de convolution simple et s'en servir pour régulariser une fonction.

Savoir calculer une transformée de Fourier simple. Savoir décomposer une fonction périodique en série de Fourier.

Savoir utiliser les théorèmes d'inversion pour construire des bases hilbertiennes ou résoudre des équations de convolution et des edp dans des situations simples.

Heures d'enseignement

CM - Analyse Hilbertienne	Cours magistral	27h
TD - Analyse Hilbertienne	Travaux dirigés	27h

Pré-requis nécessaires

Analyse de niveau licence de mathématiques : intégration pratique (Lebesgue), suites et séries, suites et séries de fonctions, convergence uniforme, normale, suites de Cauchy.

Algèbre linéaire et bilinéaire de niveau licence : produit scalaire, bases orthonormales, projection orthogonale, Gram-Schmidt.

Savoir utiliser les théorèmes d'intégration (convergence dominée, monotone, Fubini) et les théorèmes de continuité/dérivabilité sous le signe somme.

Savoir établir la convergence uniforme d'une suite de fonctions, la convergence normale d'une série de fonctions.

Savoir construire des bases orthonormales et écrire des matrices de projection orthogonales en dimension finie.

Informations complémentaires

Sur l’espace moodle du Master MFA

Bibliographie

* M. El Amrani, « Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels : niveau M1 ». Ellipses (2008)
* J.M. Bony, « Cours d'Analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier ». Les Éditions de l'École Polytechnique (2001)