

# Groupes de Matrices



## En bref

- > Langue(s) d'enseignement: Français
- > Ouvert aux étudiants en échange: Oui

## Présentation

### Description

Éléments de topologie pour  $GL(n, \mathbb{R})$  et  $SL(n, \mathbb{R})$  (connexité et densité des inversibles et des diagonalisables). Idem sur  $\mathbb{C}$ .

Décomposition polaire de  $GL(n, \mathbb{R})$  et  $GL(n, \mathbb{C})$ .

L'exponentielle d'une matrice carrée (diagonalisable ssi l'exponentielle l'est)

L'étude sur des exemples de l'algèbre de Lie et de l'application exponentielle dans les cas suivants,:

- \*  $GL(n)$  et  $SL(n)$  ; l'exponentielle de  $sl(2, \mathbb{C})$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$  n'est pas surjective.
- \*  $SU(2)$  ; représentation matricielle des nombres complexes ( $SU(2)$  est la sphère  $S^3$  via les quaternions).
- \*  $SO(3)$  ; quaternions et rotations de l'espace,; l'algèbre de Lie  $so(3)$  et le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ .
- \* Rotations de  $\mathbb{R}^4$  et paires de quaternions. Produits directs et homomorphisme de  $SU(2) \times SU(2)$  dans  $SO(4)$ .

Liaison entre sous-groupes distingués et idéaux de l'algèbre de Lie (admise dans le cas général et établie pour les exemples considérés) ; application à la simplicité de  $SO(3)$ ,  $SO(n)$  avec  $n$  impair, et la non simplicité de  $SO(4)$ .

## Objectifs

Raisonner et calculer avec les groupes de matrices et leurs espaces tangents en l'identité.

Connaître les propriétés topologiques de  $GL(n, \mathbb{R})$  ou  $GL(n, \mathbb{C})$ .

Savoir utiliser les matrices pour représenter les nombres complexes et les quaternions.

Savoir montrer que les groupes de matrices classiques sont des sous-variétés et calculer leur algèbre de Lie comme espace tangent.

Savoir calculer l'exponentielle d'une matrice dans des situations simples. Savoir utiliser l'exponentielle pour relier un groupe de matrices classique et son algèbre de Lie.

Connaître les propriétés des groupes orthogonaux et unitaires. Savoir calculer la décomposition polaire d'une matrice.

## Heures d'enseignement

CM - Groupes de Matrices	Cours magistral	13,5h
TD - Groupes de Matrices	Travaux dirigés	13,5h

## Pré-requis nécessaires

Algèbre de licence : algèbre linéaire, groupes.

Analyse et topologie de licence : notions de topologie dans les espaces vectoriels de dimension finie (ouverts, fermés, connexes, compacts), séries.

Géométrie affine et euclidienne de licence.

Cours de Courbes et Surfaces du 1er semestre.

Maîtriser le calcul matriciel et le calcul de déterminants.

Savoir calculer les éléments propres d'une matrice.

Connaître et comprendre le vocabulaire des groupes.

Savoir reconnaître une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  et calculer son plan tangent.

## Informations complémentaires

Sur l'espace moodle du Master MFA

## Bibliographie

P. Caldero, J. Germoni : « Histoires hédonistes de groupes et de géométries ». Calvage et Mounet, 2013-2015.

R. Mneimné et F. Testard : « Introduction aux groupes de Lie classiques ». Hermann, 1997.

D. Perrin : « Cours d'algèbre ». Ellipses (1996).

J. Stillwell : « Naive Lie Theory ». Springer (2008).